Basisprüfung lineare Algebra - Winter 2019

Michael Baumgartner

Im Folgenden handelt es sich um einen Lösungsvorschlag meinerseits und ich kann nicht für Korrektheit garantieren!

1.a)

EW: $\det(A-\lambda I) \overset{!}{=} 0 = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$$= (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$+ \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right] - \left[1-\lambda-2\right] + \left[2+\lambda-1\right]$$

$$= (2-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-4\right] + 2\lambda + 2$$

$$= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 + 6\lambda - 6$$

$$= (1-\lambda)\left[\underbrace{(2-\lambda)(1-\lambda)}_{\overset{!}{=}6} - 6\right] \qquad \lambda_1 = \underline{\underline{1}},\ \lambda_2 = \underline{\underline{-1}},\ \lambda_3 = \underline{\underline{4}}$$

EV: $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 1$:
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{aligned} x_3 &= s \\ x_2 &= s \\ x_1 &= -2s \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad E_1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda_2 = -1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = -s \\ x_1 = 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad E_{-1} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\lambda_3 = 4$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{G.} \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} x_3 = s \\ x_2 = s \\ x_1 = s \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad E_4 = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

b) A ist symmetrisch $\Rightarrow$ EV normieren für Orthonormalbasis:

$$b^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad b^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

c) Wissen $e^A = T e^D T^T$ für symmetrische A

$$T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{A} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -2e & 0 & \sqrt{2}\,e^{4} \\ e & -\sqrt{3}\,e^{-1} & \sqrt{2}\,e^{4} \\ e & \sqrt{3}\,e^{-1} & \sqrt{2}\,e^{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{3} & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 4e+2e^{4} & -2e+2e^{4} & -2e+2e^{4} \\ -2e+2e^{4} & e+3e^{-1}+2e^{4} & e-3e^{-1}+2e^{4} \\ -2e+2e^{4} & e-3e^{-1}+2e^{4} & e+3e^{-1}+2e^{4} \end{bmatrix}$$

MatLab korrigiert

2) a) $A^T A x = A^T b$

b)

$$V: \quad A^T A = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} -2 & 8 & 20 \\ -14 & -19 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} = \frac{1}{225}\begin{bmatrix} 468 & -324 \\ -324 & 657 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{75}\begin{bmatrix} 156 & -108 \\ -108 & 219 \end{bmatrix} = \frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52 & -36 \\ -36 & 73 \end{bmatrix}$$

$$EW: \quad \det(A - \lambda I) = 0 = \det\left(\frac{1}{25}\begin{bmatrix} 52-25\lambda & -36 \\ -36 & 73-25\lambda \end{bmatrix}\right)$$

$$= \frac{1}{625}\left((52-25\lambda)(73-25\lambda) - 36^2\right) \stackrel{!}{=} 0$$

Einfache Werte für λ probieren:

$\lambda = 1: \quad 27 \cdot 48 = 3^3 \cdot 2^4 3 = 3^4 \cdot 2^4 = 36^2$ ✓

$\lambda = 2: \quad 2 \cdot 23 \neq 36^2$

$\lambda = 3: \quad -23 \cdot (-2) \neq 36^2$

$\lambda = 4: \quad -48 \cdot (-27) = 36^2$ ✓

$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 1$

$\sigma_1 = \underline{\underline{2}}, \quad \sigma_2 = \underline{\underline{1}}$

c) EV: $(A-\lambda I)x = 0$

$\lambda_1 = 4$: $\left.\begin{matrix} -48 & -36 \\ -36 & -27 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \left.\begin{matrix} -48 & -36 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = s \\ x_1 = -\frac{3}{4}s \end{matrix}$

$$\Rightarrow E_4 = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}}$$

$\lambda_2 = 1$: $\left.\begin{matrix} 27 & -36 \\ -36 & 48 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \xrightarrow{G.} \left.\begin{matrix} 27 & -36 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = s \\ x_1 = \frac{4}{3}s \end{matrix}$

$$\Rightarrow E_1 = \underline{\text{span}\left\{ \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}}}, \quad \underline{\underline{\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

$$u^{(1)} = \frac{A v^{(1)}}{\sigma^{(1)}} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{150} \begin{bmatrix} -50 \\ -100 \\ -100 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$$u^{(2)} = \frac{A v^{(2)}}{\sigma^{(2)}} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -2 & -14 \\ 8 & -19 \\ 20 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{75} \begin{bmatrix} -50 \\ -25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

$u^{(3)}$: Braucht man nicht für d), aber wahrscheinlich für die volle Punktzahl in c):

Gram Schmidt: $b^{(3)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$e^{(3)'} = b^{(3)} - \langle e^{(1)}, b^{(3)} \rangle e^{(1)} - \langle e^{(2)}, b^{(3)} \rangle e^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow e^{(3)} = \frac{e^{(3)'}}{\| e^{(3)'} \|} = \underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$\Rightarrow U = \underline{\underline{\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

d) Wissen $Ax = b$

$$U \Sigma V^T x = b$$

$$\Sigma V^T x = U^T b = d = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = V \hat{\Sigma}^{-1} d_0$$

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\Sigma}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad d_0 = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$d = U^T b = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} d_0 \\ \\ \end{matrix}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$ Überprüft mit MatLab

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -13 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{1}{10} \begin{bmatrix} 7 \\ -26 \end{bmatrix}}}$$

3) a) $\beta = \underline{-1}$, $\alpha = \underline{\frac{5}{2}}$

b) Normieren einfach Spalten:

$$A = QR = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

MatLab korrigiert

Länge 2. Spalte: $\sqrt{\frac{25}{4} + 4 + 1} = \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{16}{4} + \frac{4}{4}} = \underline{\frac{\sqrt{45}}{2}}$

c) $|\det(A)| = |\det(QR)| = |\det Q \det R| = |\underbrace{\det Q}_{\pm 1}||\det R|$

$= |\det R| = \frac{15}{2} \cdot 3 = \underline{\underline{\frac{45}{2}}}$

4)

a) Die Abbildung ist zuerst einmal wohldefiniert, da

$\mathcal{F}(1) = 1 \in \mathcal{P}_3, \ \mathcal{F}(x) = \frac{1}{2}x \in \mathcal{P}_3, \ \mathcal{F}(x^2) = x^2 - \frac{2}{3}x \in \mathcal{P}_3$

Wir überprüfen $\forall a,b \in \mathcal{P}_3$ & $\forall \alpha \in \mathbb{R}$:

i) $\mathcal{F}(a+b) = \mathcal{F}(a) + \mathcal{F}(b)$

ii) $\mathcal{F}(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \mathcal{F}(a)$

$\Rightarrow$ i) & ii):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(a+\alpha b) &= (a+\alpha b) - \left(\int_0^1 y\,(a+\alpha b)'\,dy\right)x \\
&= a + \alpha b - \left(\int_0^1 (ya' + \alpha y b')\,dy\right)x \\
&= a + \alpha b - \int_0^1 y a'\,dy\,x - \alpha \int_0^1 y b'\,dy\,x \\
&= a - \int_0^1 y a'\,dy\,x + \alpha\left[b - \int_0^1 y b'\,dy\,x\right] \\
&= \mathcal{F}(a) + \alpha\,\mathcal{F}(b) \quad \square
\end{aligned}$$

b)
$$1 \xrightarrow{\mathcal{F}} 1 = \underline{1}\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2$$
$$x \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{2}x = 0\cdot 1 + \underline{\frac{1}{2}}\cdot x + 0\cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad F = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$
$$x^2 \xrightarrow{\mathcal{F}} x^2 - \frac{2}{3}x = 0\cdot 1 - \underline{\frac{2}{3}}\cdot x + \underline{1}\,x^2$$

c) Zeigen, dass B_1 als lin. Komb. von B_2 darg. werden kann:

$$1 = \frac{1}{2}\left[(x+1)-(x-1)\right] = \underline{\frac{1}{2}\left(b_2^{(2)}-b_2^{(1)}\right)}$$

$$x = \frac{1}{2}\left[(x+1)+(x-1)\right] = \underline{\frac{1}{2}\left(b_2^{(1)}+b_2^{(2)}\right)}$$

$$x^2 = (x^2-1) + \frac{1}{2}\left[(x+1)-(x-1)\right] = \underline{b_2^{(3)} + \frac{1}{2}\left(b_2^{(2)}-b_2^{(1)}\right)}$$

Da B_1 eine Basis des P_3 bildet & B_2 die minimale Anz. Vektoren für eine Basis enthält sind die Vektoren von B_2 lin. unabh. und somit eine Basis des P_3 □

d) $B_2 \xrightarrow{T} B_1$

transponieren nicht vergessen

$$x-1 = \underline{-1}\cdot 1 + \underline{1}\cdot x + 0\cdot x^2$$
$$x+1 = \underline{1}\cdot 1 + \underline{1}\cdot x + 0\cdot x^2$$
$$x^2-1 = \underline{-1}\cdot 1 + 0\cdot x + \underline{1}\cdot x^2$$

$$\Rightarrow T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}$$

5)

a) A symm. $\Rightarrow$ $A = TDT^T$ existiert

$$\Rightarrow \det(A) = \det(TDT^T)$$
$$= \det(T)\det(D)\det(T^T)$$
$$= \underbrace{\det(T)}_{\pm 1}\det(D)\underbrace{\det(T)^T}_{\pm 1}$$

$$= \det(D) = d_1 \cdot d_2 \cdot \ldots \cdot d_n$$
$$= \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \overset{!}{<} 0$$

$\Rightarrow$ Mindestens einer der EW muss < 0 sein, damit die Multiplikation < 0 sein kann $\square$

b)

$$x^T A x = x^T T D T^T x = (T^T x)^T D (T^T x)$$

$\rightsquigarrow$ Wählen D so, dass der negative EW an erster Stelle auf der Diagonalen steht

$\rightsquigarrow$ Wählen x so, dass $T^T x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow x = T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{t^{(1)}}} \text{ (erste Spalte von } T)$$

$$\Rightarrow (T^T x)^T D (T^T x) = d^{(1)} = \lambda^{(1)} < 0 \qquad \square$$

Oder, noch einfacher mit derselben Überlegung: Wählen x direkt den EV zum negativen EW λ_i und sehen

$$x^T A x = x^T \lambda_i x = \lambda_i x^T x = \underbrace{\lambda_i}_{<} \underbrace{\|x\|^2}_{>0} < 0 \quad \square$$

c) Hier gibt es m.M.n. 2 Möglichkeiten, eine über die Schur-Zerlegung, eine über ein Argument über komplexe EW bei reellen Matrizen.

Über Schur-Zerlegung:

Diese sagt einfach aus, dass wir eine beliebige quadratische Matrix trigonalisieren können, also statt ähnlich zu einer Diagonalmatrix ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix darstellen können.

$\Rightarrow \quad A = S \cdot R \cdot S^T$ wobei S orthogonal & R eine rechte obere Dreiecksmatrix

Das können wir ausnutzen & genau gleich wie in a) & b) argumentieren:

a)

$$\det(A) = \det(SRS^T) = \det S \cdot \det R \cdot \det S^T$$

$$= \det R = r_{11} \cdot r_{22} \cdot \ldots \cdot r_{nn} \overset{!}{\underset{<0}{=}} \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

$\Rightarrow$ R hat die EW von A auf der Diagonalen, da die Determinante von R nach dem Laplac'schen Entwicklungssatz gerade die Multiplikation der Diagonalelemente ist.

$\Rightarrow$ mind. 1 EW $\overset{!}{<} 0$ $\square$

b) Analoges Argument zu oben, wählen $S^T x$ nun aber so, dass wir gerade den negativen

EW auf der Diagonalen von R erwischen (weiss nicht, ob man bei der Schur-Zerlegung die Reihenfolge der EW frei wählen kann, ist aber auch nicht nötig).

$\rightsquigarrow$ $x = s^{(i)}$ i-te Spalte von S, falls $\lambda_i < 0$.

& nach a) $\exists i : \lambda_i < 0$ $\square$

Über Eigenschaft reeller Matrizen:

Der einzige Unterschied allg. Matrizen zu symm. ist, dass wir bei allg. Matrizen nicht zwingend reelle EW haben, sondern dass komplexe EW auftreten können. Nun ist es aber auch so, dass diese <u>immer</u> in komplex konjugierten Paaren auftreten, sprich als λ_i & $\overline{\lambda_i}$ und wir haben dann als Produkt

$$\lambda_i \cdot \overline{\lambda_i} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2 > 0$$

eine positive Zahl.

Für a) folgt also (Wenn man $\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$ aus den Eigenschaften annimmt)

$$\underbrace{\det(A)}_{<0} = \underbrace{\lambda_1 \overline{\lambda_1}}_{>0} \cdot \underbrace{\lambda_2 \overline{\lambda_2}}_{>0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_i}_{\overset{!}{<} 0} \cdot \ldots \cdot \underbrace{\lambda_n \overline{\lambda_n}}_{>0}$$

ebenfalls ein negativer EW, b) folgt mit demselben Argument wie oben. $\square$

6)

a) Wollen $\max(\operatorname{diag}(\operatorname{abs}(\underbrace{\underbrace{Q^TQ}_{I} - I}_{0}))) = 0 < \frac{1}{e}$ $\underline{\underline{\text{richtig}}}$

$\Rightarrow$ logical 1

b) Wissen $\det(A^T) \begin{cases} = \det(A)^T = \det(A) \\ = \det(-A) = (-1)^3 \det(A) \end{cases} \Big\} \ \underline{\det(A) = 0}$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{richtig}}}$

$\Rightarrow$ ⚠ Bei geraden Dimensionen gilt dies im Allgemeinen <u>nicht</u>.

c) $P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$\to$ zyklischer shift nach rechts

$\Rightarrow$ $P^1 = P^4$ usw.

$\leadsto$ Frage: Ist $100 \bmod 3 = 21 \bmod 3$

$\Rightarrow$ $1 = 0$ ↯ $\underline{\underline{\text{falsch}}}$

(mod ist Rest der Division?)

d) Wissen $\Rightarrow$ richtig

$$\mathrm{Chp}(\lambda) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) = x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$$

e) $\det(A) = \pm \det(R) = \pm 21 \Rightarrow$ falsch

f) A hat vollen Rang $\Rightarrow$ richtig